CONCOURS EXTERNE D'OFFICIER DE POLICE

SESSION DES 23, 24 ET 25 JANVIER 2024

QUESTIONS À RÉPONSES COURTES
portant sur les mathématiques

Durée : 2 heures – coefficient : 3

---o---§---o---

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la règlementation en vigueur (le mode examen n'est pas requis).

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.
Ce sujet comporte 2 pages numérotées de 1 à 2.
Ce sujet comporte quatre exercices indépendants.

Exercice 1 ***(4 points)***

1 Déterminer le nombre d'anagrammes du mot : « POLICE » ?
2 Déterminer le nombre d'anagrammes du mot : « ENQUETEUR » ?

Rappel : Un anagramme est un mot obtenu avec exactement les mêmes lettres du mot donné, apparaissant le même nombre de fois, ce mot n'a pas forcément une signification.

Exercice 2 ***(5 points)***

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1 Calculer A^3-3A^2-A.
2 En déduire que A est inversible.
3 Déterminer l'inverse de A.
4 Résoudre le système : $\begin{cases} x+y=5 \\ -2x+3y+z=8 \\ x+2y-z=6 \end{cases}$

5 Calculer la matrice inverse de $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 ***(6 points)***

Une urne contient une boule noire et 2 boules blanches. On tire au hasard une boule dans l'urne avant de la remettre dedans et on répète cette opération jusqu'à obtenir deux fois de suite une boule blanche. On appelle X, la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de tirages nécessaires et on pose, pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $p_n = P\{X = n\}$

1 Calculer (en justifiant la démarche) p_2 et p_3.
2 Montrer que, pour nombre entier naturel n valant au moins 2, on a $p_{n+2} = \frac{3p_{n+1} + 2p_n}{9}$.

3 Montrer que, pour n nombre entier naturel valant au moins 2, on a $p_n = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

4 Vérifier que $\sum_{n=2}^{+\infty} p_n = 1$, interpréter ce résultat.

5 Calculer l'espérance mathématique de X : $E(X)$.

Exercice 4 ***(5 points)***

Dans la ville de Clermont-Ferrand, on s'intéresse aux principales rues permettant de relier différents lieux, à savoir l'hôpital (H), le commissariat (C), l'école de police (E), la mairie (M) et la préfecture (P). Chacun de ces lieux est désigné par son initiale. Le tableau à double entrée suivant représente les rues reliant deux lieux (un X signifie qu'une rue relie les deux lieux ; la case vide signifie qu'il n'y en a pas).

	H	C	E	M	P
H		X		X	X
C	X		X	X	
E		X		X	
M	X	X	X		X
P	X			X	

1 Dessiner un graphe représentant cette situation.
2 Montrer qu'il est possible de trouver un trajet empruntant une fois et une seule toutes les rues de ce plan. Justifier.
3 Proposer un tel trajet.
4 Est-il possible d'avoir un trajet partant et arrivant du même lieu et passant une fois et une seule par toutes les rues ?